

基于 Schweizer-Sklar 三角范数簇 的反向三 I 算法的鲁棒性

罗敏霞, 王雅萍

(中国计量学院理学院, 浙江杭州 310018)

摘要: Schweizer-Sklar 三角范数具有很好的柔性,使得基于柔性化算子的模糊推理算法有良好的属性. 本文基于 Minkowski 距离标准研究 Schweizer-Sklar 算子簇的性质及模糊推理算法的鲁棒性. 证明了 Schweizer-Sklar 三角范数簇关于参数 m 是单调递减的; Schweizer-Sklar 三角余范数簇关于参数 m 是单调递增的; 并且给出了 Schweizer-Sklar 三角余范数簇、三角范数簇及其诱导的剩余蕴涵簇的扰动; 证明了 $m \in (0, \infty)$ 时, Schweizer-Sklar 剩余蕴涵簇 (包含 Lukasiewicz 蕴涵) 均适用于模糊推理. 进一步证明了: 当 $m \in (0, \infty)$ 时, 基于 Schweizer-Sklar 剩余蕴涵簇的 FMP-反向三 I 算法具有鲁棒性; 当 $m \in (0, \infty)$ 时, 基于 Schweizer-Sklar 剩余蕴涵簇的 FMT-反向三 I 算法具有鲁棒性.

关键词: Schweizer-Sklar 三角范数; 反向三 I 算法; Minkowski 距离; 鲁棒性

中图分类号: O142 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)04-0959-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.04.029

Robustness of the Reverse Triple I Algorithms Based on Schweizer-Sklar T-norms

LUO Min-xia, WANG Ya-ping

(College of Science, China Jiliang University, Hangzhou, Zhejiang 310018, China)

Abstract: Since the family of Schweizer-Sklar t-norm is flexible, they have good characteristics for fuzzy reasoning based on these flexible operators. In this paper, the properties of the Schweizer-Sklar operators family and the robustness of fuzzy reasoning algorithms are studied. The family of Schweizer-Sklar t-norms are decreasing for the variable m . The family of Schweizer-Sklar t-conorms are increasing for the variable m . These perturbations of Schweizer-Sklar t-conorms, Schweizer-Sklar t-norms and its residual implications are given. We proved that Schweizer-Sklar residual implication operators (include Lukasiewicz implication operator) are more suitable in fuzzy reasoning for $m \in (0, \infty)$. Moreover, we showed that the FMP reverse triple I algorithms based on the Schweizer-Sklar residual implications are robust for $m \in (0, \infty)$, and the FMT reverse triple I algorithms based on the Schweizer-Sklar residual implications are robust for $m \in (0, \infty)$.

Key words: Schweizer-Sklar t-norms; reverse triple I algorithms; Minkowski distance; robustness

1 引言

自从 Zadeh 于 1965 年提出模糊集的概念^[1], 将原来对命题的非此即彼的判断方法推广到用整个 $[0, 1]$ 区间上的值来表示真值度, 模糊理论就被广泛的应用于数学和其他应用领域, 在实践中越来越多的人使用具有优势的模糊理论方法^[2,3]. 许多学者从不同的角度研究了命题逻辑系统^[4] 进而研究模糊推理的应用. 模糊推理中的最基本推理模型是模糊假言推理 (FMP) 问

题和模糊反驳推理 (FMT) 问题^[5]:

FMP: 给定规则 $A \rightarrow B$ 并输入 A^* , 输出 B^* ;

FMT: 给定规则 $A \rightarrow B$ 并输入 B^* , 输出 A^* ;

其中: $A, A^* \in F(X)$, $B, B^* \in F(Y)$, $F(U)$ 表示论域 U 的全体模糊子集构成的集合.

针对这一问题, Zadeh 提出了 CRI (Compositional Rule of Inference) 模糊推理方法^[6], 而 CRI 方法中合成运算带有随意性, 缺少严格的逻辑依据. 1999 年王国俊教授首先提出了基于 R_0 算子的全蕴涵三 I 算法^[5], 该

算法避免了CRI方法中合成运算的随意性,并给出此模糊推理算法的严格的逻辑基础.裴道武教授研究了基于左连续三角范数诱导的剩余蕴涵的三I算法,并且建立了基于MTL逻辑系统的三I算法的可靠逻辑基础^[7,8].罗敏霞教授选取一类更具柔性,更贴合实际应用的三角范数簇,讨论了基于Schweizer-Sklar剩余蕴涵簇的全蕴涵三I算法及其连续性^[9].

宋士吉等首次提出了反向三I算法^[10],其基本思想是:已知 $A \in F(X)$ 和 $B \in F(Y)$,并且 $A^* \in F(X)$ (或者 $B^* \in F(Y)$),对一切 $x \in X, y \in Y$,寻找最优的 $B^* \in F(Y)$ (或者 $A^* \in F(X)$),使得 $A^* \rightarrow B^*$ 最大程度的支持 $A \rightarrow B$,即使得 $(A^*(x) \rightarrow B^*(y)) \rightarrow (A(x) \rightarrow B(y))$ 达到最大可能值.

罗敏霞等进一步给出基于Schweizer-Sklar剩余蕴涵簇反向三I算法^[11],为实际应用提供更具柔性的模糊推理算法.

在模糊控制中,实际的模糊推理模型很容易被不同的噪声扰动.在模糊理论下分析鲁棒性问题是很有意义的^[12],模糊推理的鲁棒性是为了测量在模糊推理中一定的输入误差可以引起多大的输出误差.度量误差的测量标准有相似度、Hamming距离、Euclidean距离、Chebyshev距离、平均扰动、 δ -扰动和 (T, δ) -扰动等等^[13-16],王国俊和段景瑶在文献^[15]提出正则度量的概念,给出估算模糊推理鲁棒性另一种度量标准.这些方法各有利弊,因为往往两个模糊集在一种距离的定义下有较小的扰动,而在另一种距离的定义下有较大的扰动,针对该问题,戴松松等人在文献^[17]中应用更具有普遍意义的规范化Minkowski距离研究模糊连接词及CRI模糊推理算法的扰动,得到较理想的结论.本文利用规范化Minkowski距离标准研究Schweizer-Sklar算子簇的扰动及基于Schweizer-Sklar剩余蕴涵簇的反向三I算法的鲁棒性.

2 预备知识

定义1^[18] 设 T 是 $[0, 1]$ 上的二元运算, $T: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$,任意 $x, y, z \in [0, 1]$,如果满足下列条件:

- (T1) $T(x, y) = T(y, x)$;
- (T2) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y)z)$;
- (T3) 当 $y \leq z$ 时, $T(x, y) \leq T(x, z)$;
- (T4) $T(x, 1) = x$.

则称 T 是一个三角范数.

设 S 是 $[0, 1]$ 上的二元运算, $S: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$,任意 $x, y, z \in [0, 1]$,如果满足(T1), (T2), (T3), 且满足(S4) $S(x, 0) = x$,则称 S 是一个三角余范.

定义2^[18] Schweizer-Sklar三角范数簇 $T_m(x, y): [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$,且对任意 $x, y \in [0, 1], m \in R$,

$$T_m(x, y) = \begin{cases} (\max(0, x^m + y^m - 1))^{\frac{1}{m}}, & m \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\ \min(x, y), & m = -\infty \quad (T_M) \\ xy, & m = 0 \quad (T_P) \\ \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0, 1]^2 \\ \min(x, y), & \text{其它} \end{cases}, & m = \infty \quad (T_D) \end{cases}$$

特别地,当 $m = 1$ 时, $T_L(x, y) = \max(0, x + y - 1)$ 是Lukasiewicz三角范数.

定义3^[18] Schweizer-Sklar三角余范簇 $S_m(x, y): [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$,且对任意 $x, y \in [0, 1], m \in R$,

$$S_m(x, y) = \begin{cases} 1 - (\max(0, (1-x)^m + (1-y)^m - 1))^{\frac{1}{m}}, & m \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\ \max(x, y), & m = -\infty \quad (S_M) \\ x + y - xy, & m = 0 \quad (S_P) \\ \begin{cases} 1, & (x, y) \in (0, 1]^2 \\ \max(x, y), & \text{其它} \end{cases}, & m = \infty \quad (S_D) \end{cases}$$

特别地,当 $m = 1$ 时, $S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$ 是Lukasiewicz三角余范.

定义4^[19,20] Schweizer-Sklar三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇 $I_m(x, y): [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$,且对任意 $x, y \in [0, 1], m \in R$,

$$I_m(x, y) = \begin{cases} \min(1, (1 - x^m + y^m)^{\frac{1}{m}}), & m \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\ \begin{cases} 1, & x \leq y \\ y, & x > y \end{cases}, & m = -\infty \quad (I_C) \\ \min(1, \frac{y}{x}), & m = 0 \quad (I_P) \\ \begin{cases} y, & x = 1 \\ 1, & x \neq 1 \end{cases}, & m = \infty \quad (I_D) \end{cases}$$

特别地,当 $m = 1$ 时, $I_L(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$ 是Lukasiewicz蕴涵.

定义5^[17] 假设 A 和 B 是论域 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ 上的模糊集,则称 $d_p(A, B) = \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |A(x_i) - B(x_i)|^p}$ 为模糊集 A 和 B 的规范化Minkowski距离,其中 $p \in [1, \infty]$ 为参数.

定义6 设 $f: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1], \varepsilon \in [0, 1]$,设 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 与 $X' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_n\}$ 是论域 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ 上的模糊集, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 与 $Y' = \{y'_1, y'_2, \dots, y'_n\}$ 是论域 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 上的模糊集, $\varepsilon_i \in [0, 1] (i = 1, 2)$,
 $\Delta_f((X, Y), (\varepsilon_1, \varepsilon_2)) =$

$$\text{SUP} \left\{ \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i) - f(x'_i, y'_i)|^p}, \right. \\ \left. d_p(X, X') \leq \varepsilon_1, d_p(Y, Y') \leq \varepsilon_2 \right\}$$

称为函数 f 在 (X, Y) 的 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ -灵敏度. 其中

$$d_p(X, X') = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|^p},$$

$$d_p(Y, Y') = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - y'_i|^p}.$$

定义 7

$$\Delta_f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) =$$

$$\text{SUP}_{\substack{X \in F(U) \\ Y \in F(V)}} \left\{ \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i) - f(x'_i, y'_i)|^p} \right\} d_p(X, X') \leq \varepsilon_1,$$

$d_p(Y, Y') \leq \varepsilon_2$ 定义为函数 f 最大灵敏度.

定义 8 设

$$d_p(X, X') = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|^p} \leq \varepsilon_1,$$

$$d_p(Y, Y') = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - y'_i|^p} \leq \varepsilon_2,$$

如果

$$d_p(f(X, Y), f(X', Y')) = \\ \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f(x_i, y_i) - f(x'_i, y'_i)|^p} \leq \varepsilon,$$

称函数 f 由 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 输入引起的 $\leq \varepsilon$ 的输出扰动.

引理 1^[21] 假设 $x, y > 0$ 且 $x \neq y$, 那么

$$rx^{r-1}(x-y) > x' - y' > ry^{r-1}(x-y) \quad (r < 0 \text{ 或 } r > 1)$$

$$rx^{r-1}(x-y) < x' - y' < ry^{r-1}(x-y) \quad (0 < r < 1)$$

$$rx^{r-1}(x-y) = x' - y' = ry^{r-1}(x-y) \quad (r = 0 \text{ 或 } 1, x = y)$$

引理 2^[22] 令 I 是一个有限指标集, 那么

$$|\bigvee_{i \in I} a_i - \bigvee_{i \in I} b_i| \leq \bigvee_{i \in I} |a_i - b_i|;$$

$$|\bigwedge_{i \in I} a_i - \bigwedge_{i \in I} b_i| \leq \bigvee_{i \in I} |a_i - b_i|$$

引理 3 假设 $x, y \in [0, 1]$ 且 $r > 1$, 那么 $|x^r - y^r| \leq r|x - y|$. 由引理 1 可得该结论.

引理 4 令函数 $f(x) = (a^m + x^m - 1)^{\frac{1}{m}}, x \in [c, b] \subset [0, 1] (c < b), a \in [0, 1], m \geq 1$ 且 $m \neq 0$, 那么 $|f(b) - f(c)| \leq |b - c|$.

证明: 由于 $f(x)$ 是 $[c, b]$ 上的可导函数, 故

$$f'(x) = (a^m + x^m - 1)^{\frac{1}{m}-1} \cdot x^{m-1}$$

$$= ((a^m - 1) \cdot x^{-m} + 1)^{\frac{1-m}{m}} \leq 1,$$

因为 $f(x)$ 在 $[c, b]$ 连续, 由 Lagrange 中值定理, 至少存在一点 $\xi \in (c, b)$ 使得

$$f(b) - f(c) = f'(\xi)(b - c) \leq b - c.$$

类似的, 如果 $f(c) - f(b) \geq 0$, 应用 Lagrange 中值定理, 至少存在一点 $\xi \in (c, b)$ 使得

$$f(c) - f(b) = f'(\xi)(c - b) \leq c - b,$$

进而有, $|f(b) - f(c)| = |f'(\xi)(b - c)| \leq |b - c|$.

引理 5 令函数 $g(x) = (1 - a^m + x^m)^{\frac{1}{m}}$ 和 $h(x) = (1 - x^m + a^m)^{\frac{1}{m}}$, 在 $g(x)$ 和 $h(x)$ 两个函数中 $a \in [0, 1], x \in [b, c] \subseteq [0, 1]$, 则当 $m \in (0, 1]$ 时, $|h(b) - h(c)| \leq \frac{1}{m}|b - c|^m; |g(b) - g(c)| \leq \frac{1}{m}|b - c|^m$. 当 $m \in (1, \infty)$ 时, $|h(b) - h(c)| \leq (m|b - c|)^{\frac{1}{m}}; |g(b) - g(c)| \leq (m|b - c|)^{\frac{1}{m}}$.

引理 6 (Minkowski 不等式) 令 $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$, 且 $1 \leq p < \infty$. 那么

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}.$$

引理 7^[23] 设 $A, B \in (0, 1)$ 或 $A, B \in (1, +\infty)$, 如果 $A + B > 1$, 则 $(A + B - 1) \text{Ln}(A + B - 1) \geq A \text{Ln}A + B \text{Ln}B$.

命题 1^[11] 假设 FMP 问题中蕴涵算子是 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇, 那么 FMP-反向三 I 解的表达式为: 对 $x \in X, y \in Y$,

$$B^*(y) = \begin{cases} \inf_{x \in E_{y1}} \{((A(x) \rightarrow B(y))^m + (A^*(x))^m - 1)^{\frac{1}{m}}\} \\ \inf_{x \in E_{y2}} \{((A(x) \rightarrow B(y))^m + (A^*(x))^m - 1)^{\frac{1}{m}}\} \end{cases}$$

其中, $E_{y1} = \{x \in X \mid m \leq 0, A(x) \rightarrow B(y) \neq 1, (A(x) \rightarrow B(y))^m + (A^*(x))^m - 1 > 0\}; E_{y2} = \{x \in X \mid m > 0, (A(x) \rightarrow B(y))^m + (A^*(x))^m - 1 > 0, (1 - (A^*(x))^m)^{\frac{1}{m}} \vee (A(x) \rightarrow B(y)) < 1\}$.

命题 2^[11] 假设 FMT 问题中的蕴涵算子是 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵 $I_m(x, y) (m > 0)$, FMT-反向三 I 解 A^* 的表达式为: 对 $x \in X, y \in Y$,

$$A^*(x) = \sup_{y \in E_x} \{1 - (A(x) \rightarrow B(y))^m + (B^*(y))^m\},$$

其中, $E_x = \{y \in Y \mid m > 0, B^*(y) \vee (A(x) \rightarrow B(y)) < 1, B^*(y) < (A(x) \rightarrow B(y))\}$

3 Schweizer-Sklar 模糊连结词的性质及其扰动

命题 3 Schweizer-Sklar 三角范数簇 $T_m(x, y)$ 关于 m 是单调递减的, 且

$$T_D(x, y) \leq T_{m_1}(x, y) \leq T_L(x, y) \leq T_{m_2}(x, y) \\ \leq T_p(x, y) \leq T_{m_3}(x, y) \leq T_M(x, y),$$

其中, $m_1 \in (1, +\infty), m_2 \in (0, 1), m_3 \in (-\infty, 0)$.

证明:

(1) 当 $m \in (1, +\infty)$ 时, $T_D(x, y) \leq T_m(x, y) \leq T_L(x, y)$, 且 $T_m(x, y)$ 关于 m 是单调递减的.

先证明 $T_D(x, y) \leq T_m(x, y)$. 当 $\max(x, y) = 1$ 时, 不妨假设 $y = 1$, 则 $T_D(x, y) = x = T_m(x, y)$; 其他情形 $T_D(x, y) = 0 \leq T_m(x, y)$.

下证 $T_m(x, y) \leq T_L(x, y) (m \in (1, +\infty))$, 且

$T_m(x, y)$ ($m \in [1, +\infty)$) 关于 m 是单调递减的.

当 $m \in (1, +\infty)$ 时, $\forall x, y \in (0, 1), x^m + y^m - 1 \leq x + y - 1$. 当 $x^m + y^m \leq 1$ 时, $T_m(x, y) = 0 \leq T_L(x, y)$; 当 $x^m + y^m > 1$ 时, 则 $T_m(x, y) = x^m + y^m - 1$.

设 $T_m(x, y): [1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^+, T_m(x, y) = (x^m + y^m - 1)^{1/m}$ 是关于 x, y, m 的一个多元函数, 则

$$\begin{aligned} \text{Ln}(T_m(x, y)) &= \text{Ln}((x^m + y^m - 1)^{1/m}) \\ &= \frac{1}{m} \text{Ln}(x^m + y^m - 1), \end{aligned}$$

从而,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_m(x, y)} \cdot \frac{\partial(T_m(x, y))}{\partial m} &= \frac{1}{m^2} \text{Ln}(x^m + y^m - 1) + \frac{x^m \text{Ln}x + y^m \text{Ln}y}{m(x^m + y^m - 1)} \\ &= \frac{-(x^m + y^m - 1) \text{Ln}(x^m + y^m - 1) + x^m \text{Ln}x^m + y^m \text{Ln}y^m}{m^2(x^m + y^m - 1)} \end{aligned}$$

由引理 7, $\frac{1}{T_m(x, y)} \cdot \frac{\partial(T_m(x, y))}{\partial m} < 0$, 因此

$\frac{\partial(T_m(x, y))}{\partial m} < 0$, 从而, $T_m(x, y) = (x^m + y^m - 1)^{1/m}$ ($m \in [1, +\infty)$) 关于 m ($m \in [1, +\infty)$) 是单调递减的. 又 $T_1(x, y) = x + y - 1 = T_L(x, y)$, 从而 $(x^m + y^m - 1)^{1/m} \leq x + y - 1$, 即 $T_m(x, y) \leq T_L(x, y)$.

(2) 当 $(m \in (0, 1))$ 时, $T_L(x, y) \leq T_m(x, y) \leq T_p(x, y)$, 且 $T_m(x, y)$ 关于 m 是单调递减的.

(3) 当 $m \in (-\infty, 0)$ 时, $T_p(x, y) \leq T_m(x, y) \leq T_M(x, y)$, 且 $T_m(x, y)$ 关于 m 是单调递减的.

类似(1)的证明, 可证(2)与(3)的结论.

注 1 由命题 3 我们得到含有参数的三角范数簇与参数 m 之间的关系, 且四种常用的三角范数包含在其中, 从而得到它们之间的关系^[24]:

$$T_D(x, y) \leq T_L(x, y) \leq T_P(x, y) \leq T_M(x, y).$$

命题 4 Schweizer-Sklar 三角余范数簇关于 m 单调递增, 即

$$\begin{aligned} S_M(x, y) &\leq S_{m_1}(x, y) \leq S_p(x, y) \leq S_{m_2}(x, y) \\ &\leq S_L(x, y) \leq S_{m_3}(x, y) \leq S_D(x, y), \end{aligned}$$

其中, $m_1 \in (-\infty, 0), m_2 \in (0, 1), m_3 \in (1, \infty)$.

命题 4 可类似于命题 3 证明.

注 2 由命题 4 我们得到含有参数的三角余范簇与参数 m 之间的关系, 且四种常用的三角余范包含在其中, 从而得到它们之间的关系^[24]:

$$S_M(x, y) \leq S_p(x, y) \leq S_L(x, y) \leq S_D(x, y).$$

命题 5 假设 $d_p(A, A') \leq \varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2$, 那么 $d_p(T_m(A, B), T_m(A', B')) \leq$

$$\begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2, & m \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty); \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2, & m = 0; \\ \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2), & m = -\infty, \\ 1, & m = \infty \end{cases}$$

证明: 假设

$$\begin{aligned} A &= (a_1, a_2, \dots, a_n), A' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n); \\ B &= (b_1, b_2, \dots, b_n), B' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n), \\ C &= T_m(A, B) = \{c_i\}, C' = T_m(A', B') = \{c'_i\}, \\ & i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

当 $m \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} |c_i - c'_i| &= |(a_i^m + b_i^m - 1)^{1/m} - (a_i'^m + b_i'^m - 1)^{1/m}| \\ &\leq \frac{1}{m} |(a_i^m + b_i^m - 1) - (a_i'^m + b_i'^m - 1)| \text{ (引理 1)} \\ &\leq \frac{1}{m} (|a_i^m - a_i'^m| + |b_i^m - b_i'^m|) \text{ (引理 3)} \\ &= |a_i - a_i'| + |b_i - b_i'| \end{aligned}$$

当 $m < 1$ 且 $m \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} |c_i - c'_i| &= |(a_i^m + b_i^m - 1)^{1/m} - (a_i'^m + b_i'^m - 1)^{1/m}| \\ &= |(a_i^m + b_i^m - 1)^{1/m} - (a_i^m + b_i'^m - 1)^{1/m} \\ &\quad + (a_i^m + b_i'^m - 1)^{1/m} - (a_i'^m + b_i'^m - 1)^{1/m}| \\ &= |(a_i^m + b_i^m - 1)^{1/m} - (a_i^m + b_i'^m - 1)^{1/m}| \\ &\quad + |(a_i^m + b_i'^m - 1)^{1/m} - (a_i'^m + b_i'^m - 1)^{1/m}| \\ &\leq |b_i - b_i'| + |a_i - a_i'| \text{ (引理 4)} \end{aligned}$$

则可得,

$$\begin{aligned} d_p(T_m(A, B), T_m(A', B')) &= \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |c_i - c'_i|^p} \\ &= \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |(a_i^m + b_i^m - 1)^{1/m} - (a_i'^m + b_i'^m - 1)^{1/m}|^p} \\ &\leq \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|a_i - a_i'| + |b_i - b_i'|)^p} \\ &\leq \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - a_i'|^p} + \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |b_i - b_i'|^p} \text{ (引理 6)} \\ &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

当 $m = 0$ 时,

设 $|a_i - a_i'| = \Delta a_i \leq \varepsilon_1, |b_i - b_i'| = \Delta b_i \leq \varepsilon_2$, 则 $d_p(A, A') \leq \varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2$, 不妨假设 $a_i \geq a_i', b_i \geq b_i'$ 则 $a_i = a_i - \Delta a_i, b_i = b_i - \Delta b_i$.

$$d_p(T_m(A, B), T_m(A', B'))$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |c_i - c'_i|^p} \\ &= \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i \cdot b_i - (a_i - \Delta a_i)(b_i - \Delta b_i)|^p} \\ &= \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i \Delta b_i + b_i \Delta a_i - \Delta a_i \Delta b_i|^p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta b_i + \Delta a_i - \Delta a_i \Delta b_i|^p} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2|^p} (S_p \text{ 的单调性}) \\ &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \end{aligned}$$

其它情形类似可证明。

设 $a_i = 1, a'_i = 1 - \varepsilon_1, b_i = 1, b'_i = 1 - \varepsilon_2$, 则 $\Delta_{T_p}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2$.

当 $m = -\infty$ 时,

设 $|a_i - a'_i| \leq \varepsilon_1, |b_i - b'_i| \leq \varepsilon_2$,

$$\begin{aligned} &d_p(T_M(A, B), T_M(A', B')) \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |c_i - c'_i|^p} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\min\{a_i, b_i\} - \min\{a'_i, b'_i\}|^p} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\{|a_i - a'_i|, |b_i - b'_i|\}^p} (\text{引理 2}) \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}^p} = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{aligned}$$

设 $a_i = 1, a'_i = 1 - \varepsilon_1; b_i = 1, b'_i = 1 - \varepsilon_2$; 则 $d_p(A, A') \leq \varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2$, 此时有

$$\begin{aligned} &d_p(T_M(A, B), T_M(A', B')) \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\min\{a_i, b_i\} - \min\{a'_i, b'_i\}|^p} \\ &= \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{aligned}$$

当 $m = \infty$ 时,

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in [0, 1)^2 \\ \min(x, y), & \text{其它} \end{cases}$$

设 $a_i = 1, a'_i = 1 - \varepsilon_1; b_i = 1, b'_i = 1 - \varepsilon_2$; 则 $d_p(A, A') \leq \varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2$, 而 $d_p(T_D(A, B), T_D(A', B')) =$

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |1 - 0|^p} = 1.$$

注 3 本命题给出一簇含参数的三角范数的扰动. 特别当 $m = 0$ 时, 乘积三角范数的最大灵敏度是 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2$; 当 $m = 1$ 时, Lukasiewicz 三角范数的最大灵敏度是 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$; 当 $m = -\infty$ 时, 极小三角范数的最大灵敏度是 $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; 当 $m = \infty$ 时, 突变三角范数的最大灵敏度是 1, 这种情形不具有鲁棒性.

命题 6 假设 $d_p(A, A') \leq \varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2$, 那么

$$d_p(I_m(A, B), I_m(A', B')) \leq \begin{cases} \frac{1}{m}(\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m), & m \in (0, 1]; \\ m^{\frac{1}{m}}(\varepsilon_1^{\frac{1}{m}} + \varepsilon_2^{\frac{1}{m}}), & m \in (1, \infty); \\ 1, & m = \infty; \\ 1, & m = 0; \\ 1, & m = -\infty; \end{cases}$$

命题 6 可类似于命题 5 证明.

注 4 当 $m \in (0, \infty)$, 含参数的蕴涵算子簇具有鲁棒性, 适合用于模糊推理; 特别当 $m = 1$ 时, Lukasiewicz 蕴涵算子的最大灵敏度是 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$. 另外, 当 $m = 0$ 时, Goguen 蕴涵算子的最大灵敏度是 1; 当 $m = -\infty$ 时, Godel 蕴涵的最大灵敏度都是 1; 当 $m = \infty$ 时, 突变蕴涵的最大灵敏度是 1, 这三种情形都不具有鲁棒性, 从而均不适合用于模糊推理.

命题 7 假设 $d_p(A, A') \leq \varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2$, 那么 $d_p(S_m(A, B), S_m(A', B'))$

$$\leq \begin{cases} \varepsilon_1 + \varepsilon_2, & m \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty); \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2, & m = 0; \\ \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2), & m = -\infty; \\ 1, & m = \infty \end{cases}$$

证明: 假设

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n), A' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n);$$

$$B = (b_1, b_2, \dots, b_n), B' = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n);$$

$$C = S_m(A, B) = \{c_i\}, C' = S_m(A', B') = \{c'_i\}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

当 $m \geq 1$,

$$\begin{aligned} |c_i - c'_i| &= |1 - ((1 - a_i)^m + (1 - b_i)^m - 1)^{1/m} \\ &\quad - \{1 - ((1 - a'_i)^m + (1 - b'_i)^m - 1)^{1/m}\}| \\ &\leq |((1 - a_i)^m + (1 - b_i)^m - 1)^{1/m} \\ &\quad - ((1 - a'_i)^m + (1 - b'_i)^m - 1)^{1/m}| \\ &\leq |((1 - a_i)^m + (1 - b_i)^m - 1)^{1/m} \\ &\quad - ((1 - a_i)^m + (1 - b'_i)^m - 1)^{1/m}| \\ &\quad + |((1 - a_i)^m + (1 - b'_i)^m - 1)^{1/m} \\ &\quad - ((1 - a'_i)^m + (1 - b'_i)^m - 1)^{1/m}| \\ &\leq |a_i - a'_i| + |b_i - b'_i| (\text{引理 4}) \end{aligned}$$

当 $m \leq 1$ 且 $m \neq 0$,

$$\begin{aligned} |c_i - c'_i| &= |1 - ((1 - a_i)^m + (1 - b_i)^m - 1)^{1/m} \\ &\quad - \{1 - ((1 - a'_i)^m + (1 - b'_i)^m - 1)^{1/m}\}| \\ &\leq \frac{1}{m} |((1 - a_i)^m + (1 - b_i)^m - 1) \\ &\quad - ((1 - a'_i)^m + (1 - b'_i)^m - 1)| (\text{引理 3}) \\ &\leq \frac{1}{m} (m|a_i - a'_i| + m|b_i - b'_i|) (\text{引理 1}) \\ &= |a_i - a'_i| + |b_i - b'_i| \end{aligned}$$

则可得到,

$$\begin{aligned} &d_p(S_m(A, B), S_m(A', B')) \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |c_i - c'_i|^p} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|a_i - a'_i| + |b_i - b'_i|)^p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - a'_i|^p} \\ &+ \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |b_i - b'_i|^p} \text{ (引理 6)} \\ &\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

当 $m=0$ 时,

设 $|a_i - a'_i| = \Delta a_i \leq \varepsilon_1, |b_i - b'_i| = \Delta b_i \leq \varepsilon_2$, 则 $d_p(A, A') \leq \varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2$, 不妨假设 $a_i \geq a_i', b_i \geq b_i'$, 则 $a_i = a_i + \Delta a_i, b_i = b_i + \Delta b_i$,
 $d_p(S_m(A, B), S_m(A', B'))$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |c_i - c'_i|^p} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |(a_i + b_i - a_i \cdot b_i) - (a'_i + b'_i - a'_i \cdot b'_i)|^p} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |(1 - b_i)\Delta a_i + (1 - a_i)\Delta b_i - \Delta a_i \Delta b_i|^p} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta b_i + \Delta a_i - \Delta a_i \Delta b_i|^p} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2|^p} \text{ (} S_p \text{ 的单调性)} \\ &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \end{aligned}$$

其它情形类似可证明.

设 $a_i = \varepsilon_1, a'_i = 0, b_i = \varepsilon_2, b'_i = 0$, 则 $\Delta_{S_p}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2$.

当 $m = -\infty$ 时, 设 $|a_i - a'_i| \leq \varepsilon_1, |b_i - b'_i| \leq \varepsilon_2$,

$$\begin{aligned} &d_p(S_M(A, B), S_M(A', B')) \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |c_i - c'_i|^p} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\max\{a_i, b_i\} - \max\{a'_i, b'_i\}|^p} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\{|a_i - a'_i|, |b_i - b'_i|\}^p} \text{ (引理 2)} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \{\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\}^p} = \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2). \end{aligned}$$

设 $a_i = \varepsilon_1, a'_i = 0; b_i = \varepsilon_2, b'_i = 0$, 则 $d_p(A, A') \leq \varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2$, 此时

$$\begin{aligned} &d_p(S_M(A, B), S_M(A', B')) \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\max\{a_i, b_i\} - \max\{a'_i, b'_i\}|^p} \\ &= \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{aligned}$$

当 $m = \infty$ 时,

$$S_D(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in (0, 1)^2 \\ \max(x, y), & \text{其它} \end{cases}$$

设 $a_i = 0, a'_i = \varepsilon_1; b_i = 1, b'_i = 1 - \varepsilon_2$; 则 $d_p(A, A') \leq$

$\varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2$, 而

$$d_p(S_D(A, B), S_D(A', B')) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |1 - 0|^p} = 1$$

注 5 本命题给出一簇含参数的三角余范的扰动. 特别当 $m=0$ 时, 概率和三角余范的最大灵敏度是 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2$; 当 $m=1$ 时, Lukasiewicz 三角余范的最大灵敏度是 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$; 当 $m = -\infty$ 时, 极大三角余范的最大灵敏度是 $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; 当 $m = \infty$ 时, 突变和三角余范的最大灵敏度是 1, 这种情形不具有鲁棒性.

4 基于 Schweizer-Sklar 剩余蕴涵簇的反向三 I 算法的鲁棒性

定理 1 假设 $d_p(A, A') \leq \varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2, d_p(A^*, A'^*) \leq \varepsilon_3, B^*$ 和 B'^* 是 FMP-反向三 I 解 ($m \in (0, \infty)$), 则

$$d_p(B^*, B'^*) \leq \begin{cases} \frac{1}{m}(\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m) + \varepsilon_3, & m \in (0, 1] \\ m^{\frac{1}{m}}(\varepsilon_1^{\frac{1}{m}} + \varepsilon_2^{\frac{1}{m}}) + \varepsilon_3, & m \in (1, \infty) \end{cases}$$

证明: 当 $m \in (0, \infty)$ 时, 令

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), A' = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n});$$

$$B = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}), B' = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2k});$$

$$C = I_m(A, B), C' = I_m(A', B');$$

$$(C^m + (A^*)^m - 1)^{1/m} = \{d_{qi}\};$$

$$(C'^m + (A'^*)^m - 1)^{1/m} = \{d'_{qi}\};$$

$$q = 1, 2, \dots, nk; i = 1, 2, \dots, n$$

则由命题 6,

$$d_p(C, C') \leq \begin{cases} \frac{1}{m}(\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m), & m \in (0, 1] \\ m^{\frac{1}{m}}(\varepsilon_1^{\frac{1}{m}} + \varepsilon_2^{\frac{1}{m}}), & m \in (1, \infty) \end{cases}$$

再由命题 1 和命题 5,

$$\begin{aligned} &d_p(B^*, B'^*) \leq \sqrt{\frac{1}{n^2 k} \sum_{q=1}^{nk} \sum_{i=1}^n |d_{qi} - d'_{qi}|^p} \\ &\leq \begin{cases} \frac{1}{m}(\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m) + \varepsilon_3, & m \in (0, 1] \\ m^{\frac{1}{m}}(\varepsilon_1^{\frac{1}{m}} + \varepsilon_2^{\frac{1}{m}}) + \varepsilon_3, & m \in (1, \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

注 6 本定理给出基于一族含参数的蕴涵算子的 FMP-反向三 I 算法的鲁棒性, 特别当 $m=1$ 时, 基于 Lukasiewicz 蕴涵算子的 FMP-反向三 I 解的最大灵敏度是 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. 由命题 6 可知, 其它三种常用的蕴涵运算均不适合做模糊推理连接词.

定理 2 假设 $d_p(A, A') \leq \varepsilon_1, d_p(B, B') \leq \varepsilon_2, d_p(B^*, B'^*) \leq \varepsilon_3, A^*$ 和 A'^* 是 FMT-反向三 I 解 ($m \in (0, \infty)$), 则

$$d_p(A^*, A'^*) \leq \begin{cases} \frac{1}{m}[(\frac{1}{m}(\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m))^m + \varepsilon_3^m], & m \in (0, 1] \\ m^{\frac{1}{m}}[(m^{\frac{1}{m}}(\varepsilon_1^{\frac{1}{m}} + \varepsilon_2^{\frac{1}{m}}))^{\frac{1}{m}} + \varepsilon_3^{\frac{1}{m}}], & m \in (1, \infty) \end{cases}$$

证明:当 $m > 0$ 时,令

$$A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), A' = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n});$$

$$B = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}), B' = (b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2k});$$

$$C = I_m(A, B), C' = I_m(A', B');$$

$$(1 - C^m + (B^*)^m)^{1/m} = \{d_{qi}\};$$

$$(1 - C'^m + (B'^*)^m)^{1/m} = \{d'_{qi}\};$$

$$q = 1, 2, \dots, nk; i = 1, 2, \dots, n$$

由命题 6,

$$d_p(C, C') \leq \begin{cases} \frac{1}{m}(\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m), m \in (0, 1] \\ m^{\frac{1}{m}}(\varepsilon_1^{\frac{1}{m}} + \varepsilon_2^{\frac{1}{m}}), m \in (1, \infty) \end{cases}.$$

再由命题 2 与命题 6,

$$\begin{aligned} & d_p(A^*, A'^*) \\ & \leq \sqrt[p]{\frac{1}{n^2 k} \sum_{q=1}^{nk} \sum_{i=1}^n |d_{qi} - d'_{qi}|^p} \\ & \leq \begin{cases} \left[\left(\frac{1}{m}(\varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m) \right)^m + \varepsilon_3^m \right], m \in (0, 1] \\ \left[\left(m^{\frac{1}{m}}(\varepsilon_1^{\frac{1}{m}} + \varepsilon_2^{\frac{1}{m}}) \right)^m + \varepsilon_3^m \right], m \in (1, \infty) \end{cases} \end{aligned}$$

5 结论

本文以 Minkowski 距离为度量标准,研究 Schweizer-Sklar 三角范数簇、三角余范簇及其诱导的剩余蕴涵簇的单调性及其扰动. 证明了 Schweizer-Sklar 三角范数簇关于参数 m 是单调递减的; Schweizer-Sklar 三角余范簇关于参数 m 是单调递增的; 并且给出四种著名的三角范数及三角余范的序. 给出了 Schweizer-Sklar 三角余范簇、三角范数簇及其诱导的剩余蕴涵簇的扰动; 证明了 $m \in (0, \infty)$ 时, Schweizer-Sklar 剩余蕴涵算子簇具有很好的鲁棒性, 均适合用于模糊推理. 文献[11]给出了的基于 Schweizer-Sklar 剩余蕴涵簇反向三 I 算法解的一般表达式, 在此基础上, 结合 Schweizer-Sklar 三角范数簇及其诱导的剩余蕴涵簇的扰动研究得到, 当 $m \in (0, \infty)$ 时, 基于 Schweizer-Sklar 剩余蕴涵簇的 FMP-反向三 I 算法具有鲁棒性; 当 $m \in (0, \infty)$ 时, 基于 Schweizer-Sklar 剩余蕴涵簇的 FMT-反向三 I 算法具有鲁棒性. 因其为模糊控制等应用提供了可靠的理论依据, 使得基于柔性 Schweizer-Sklar 三角范数簇的模糊推理算法具有更广泛、更实际的应用前景.

参考文献

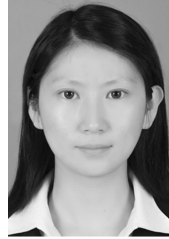
- [1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3):338-353.
- [2] 陈卫东, 朱奇光. 基于模糊算法的机器人路径规划[J]. 电子学报, 2011, 39(4):971-974.
CHEN Wei-dong, ZHU Qi-guang. Mobile robot path planning based on fuzzy algorithms[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(4):971-974. (in Chinese)
- [3] 袁学海, 李洪兴, 杨雪. 基于模糊变换的模糊系统和模糊推理建模法[J]. 电子学报, 2013, 41(4):674-680.
YUAN Xue-hai, LI Hong-xing, YANG Xue. Fuzzy system and fuzzy inference modeling method based on fuzzy transformation[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(4):674-680. (in Chinese)
- [4] 罗敏霞, 姚宁. L^* 系统中公式的语构程度化方法[J]. 电子学报, 2011, 39(2):424-428.
LUO Min-xia, YAO Ning. Syntactic graded method of formulas in the system L^* [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(2):424-428. (in Chinese)
- [5] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三 I 算法[J]. 中国科学(E 辑), 1999, 29(1):43-53.
- [6] Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1973, 3(1):28-44.
- [7] Pei D W. Unified full implication algorithms of fuzzy reasoning[J]. Information Sciences, 2008, 178(2):520-530.
- [8] Pei D W. Formalization of implication based fuzzy reasoning method[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(5):837-846.
- [9] Luo M X, Yao N. Triple I algorithms based on Schweizer-Sklar operators in fuzzy reasoning[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(5):640-652.
- [10] 宋士吉, 吴澄. 模糊推理的反向三 I 算法[J]. 中国科学(E 辑), 2002, 32(2):230-246.
- [11] 罗敏霞, 桑倪. 基于 Schweizer-Sklar 三角范数簇诱导的剩余蕴涵簇的反向三 I 算法[J]. 智能系统学报, 2012, 7(6):494-499.
LUO Minxia, SANG Ni. The reverse triple I algorithms based on a class of residual implications induced by the family of Schweizer-Sklar t-norms[J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2012, 7(6):494-499. (in Chinese)
- [12] 陈明, 陈武凡, 冯前进, 杨丰. 基于互信息量和模糊梯度相似性的医学图像配准[J]. 电子学报, 2003, 31(12):1835-1838.
CHEN Ming, CHEN Wu-fan, FENG Qian-jin, YANG Feng. Medical image registration based on mutual information and fuzzy gradient similarity[J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(12):1835-1838. (in Chinese)
- [13] Dai S S, Pei D W, Guo D H. Robustness analysis of full implication inference method[J]. Approximate Reasoning, 2013, 54(5):653-666.
- [14] Li Y F, Qin K Y, He X X. Robustness of fuzzy connectives and fuzzy reasoning[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2013, 225(8):93-105.

- [15] Wang G J, Duan J Y. On robustness of the full implication triple I inference method with respect to finer measurements [J]. *Approximate Reasoning*, 2014, 55 (3): 787 - 796.
- [16] Hung W L, Yang M S. Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on L_p metric [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2007, 46(1): 120 - 136.
- [17] Dai S S, Pei D W, Wang S M. Perturbation of fuzzy sets and fuzzy reasoning based on normalized Minkowski distance [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2012, 189 (1): 63 - 73.
- [18] Klement E P, Mesiar R, Pap E. *Triangular Norms* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 2000.
- [19] Whalen T. Parameterized R-implications [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, 134(2): 231 - 281.
- [20] He H C, Wang H, Liu Y H. *Principle of Universal Logics* [M]. Beijing: Science Press, 2006.
- [21] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. *Inequalities* (2nd edition) [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
- [22] 徐蔚鸿, 谢中科, 杨静宇, 叶有培. 两类模糊推理算法的连续性和逼近性 [J]. *软件学报*, 2004, 15 (10): 1485 - 1492.
XU Wei-Hong, XIE Zhong-Ke, YANG Jing-Yu, YE You-Pei. Continuity and approximation properties of two classes of algorithms for fuzzy inference [J]. *Journal of Software*, 2004, 15 (10): 1485 - 1492. (in Chinese)
- [23] 罗敏霞, 何华灿. *泛逻辑学语构理论* [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [24] Wang X Z, Ruan D, Kerre E E. *Mathematics of Fuzziness—Basic Issues* [C]. Heidelberg: Springer, 2009.

作者简介



罗敏霞 女, 1964 年生于山西运城, 教授、博士、硕士生导师。中国人工智能学会人工智能基础专业委员会常务委员; 中国计算机学会多值逻辑与模糊逻辑专业委员会委员。主要研究方向为计算机科学中的非经典逻辑、模糊推理算法与图像处理等, 先后在国际国内专业领域的期刊上发表论文 90 余篇, 出版专著 2 部, 教材 1 部。E-mail: mxluo@cjlu.edu.cn



王雅萍 女, 1990 年生于甘肃兰州。硕士研究生, 研究方向为非经典逻辑与模糊推理算法。